Городская сессия научного общества учащихся

Секция «Теоретическая математика»

Замечательные точки треугольника

Слидкевич Валерия Анатольевна, 11 класс, МБОУ

«Средняя общеобразовательная школа № 12»

Научный руководитель:

Левченко Светлана Николаевна

Учитель математики высшей квалификационной категории

г. Горно – Алтайск

2018г.

Содержание.

Стр.

1. Введение 3
2. Основная часть 4
3. Глава I. История открытия замечательных точек 4
4. Глава II. Теоремы о существовании замечательных точек 5
5. Глава III. Определения и свойства замечательных точек 8

3. Заключение 11

4. Список литературы 12

5. Приложение 13

**Введение**

Исторически геометрия начиналась с треугольника, поэтому вот уже два с половиной тысячелетия треугольник является как бы символом геометрии. Удивительно, но треугольник, несмотря на свою кажущуюся простоту, является неисчерпаемым объектом изучения – никто даже в наше время не осмелится сказать, что изучил и знает все свойства треугольника. Поэтому изучение школьной геометрии не может осуществляться без глубокого изучения геометрии треугольника.

*Актуальность* выбора данной темы вызвана тем, что при решении олимпиадных задач мне постоянно приходится сталкиваться с замечательными точками треугольника, и более полное их изучение поможет мне при дальнейшем обучении.

*Новизна.* В работе подобран редкий материал по данной теме, изучаемой на уроках геометрии в очень узких рамках и только в профильных классах

*Объектом* нашего исследования стали замечательные точки треугольника.

*Предметом* исследования – практические способы построения замечательных точек.

Цель работы: изучение некоторых замечательных точек треугольника, применение полученных знаний к решению задач.

*Задачи:*

* Проанализировать литературу по данной теме;
* Обобщить свойства и доказать необходимые теоремы;
* Решить задачи по данной теме.

**Глава I**

**История открытия замечательных точек**

С одной стороны, история математики – это непрерывный процесс открытий; с другой стороны, открытия в математике, касающиеся геометрии треугольника, были сделаны по преимуществу в Античный период, в период позднего Средневековья и начала Нового времени. Поэтому здесь рассмотрим развитие математики в эти периоды.

Свойства треугольника были хорошо изучены еще в древности греками. Архимед, определяя положение центра тяжести треугольной пластинки, установил, что он лежит на каждой из трех медиан.

Известно, что в «Началах» Евклида излагается материал о центрах вписанной и описанной окружностей, точек пересечения медиан, высот и биссектрис.

Принято считать, что вся современная наука оформилась в 17 веке. Начало открытий замечательных точек треугольника, не изучаемых в школе, положил в 17 веке Джованни Чева (1648 - 1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих, которое положило начало новой – синтетической геометрии; оно изложено в сочинении "О взаимнопересекающихся прямых" (1678). Во-первых, его теорема (знаменитая теорема Чевы) сама по себе представляет ценность, во-вторых, ее применение позволило открыть свойства замечательных точек треугольника, известных как точки Нагеля и Жергонна.

Следующим продвижением в истории математики является доказательство Готфридом Лейбницем теоремы о пересечении медиан в 1701 году в Берлине. В 19 веке появляется публикация расчетов молодого французского математика Ферма, связанных с минимальным суммарным расстоянием до вершин треугольника. Уже в конце 19 века Брокар, Нагель и Торричелли, изучая труды Ферма и применяя теорему Чевы, замечают неопубликованные ранее никем некоторые свойства точки Ферма.

**Глава II**

**Теоремы о существовании замечательных точек**

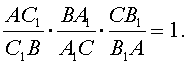
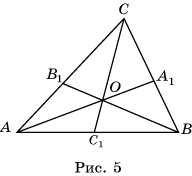
Большинство замечательных точек треугольника могут быть получены при помощи следующей процедуры. Пусть у нас имеется некоторое правило, согласно которому мы сможем выбрать определённую точку *A*1 на стороне *BC* (или её продолжении) треугольника *ABC* (например, выберем середину этой стороны). Затем построим аналогичные точки *B*1, *C*1 на двух других сторонах треугольника (в нашем примере — ещё две середины сторон). Если правило выбора удачное, то прямые *AA*1, *BB*1,*CC*1 пересекутся в некоторой точке *О* (выбор середин сторон в этом смысле, конечно, удачный).

Поэтому хотелось бы иметь какой-нибудь общий метод, позволяющий по положению точек на сторонах треугольника определять, пересекается ли соответствующая тройка прямых в одной точке или нет.

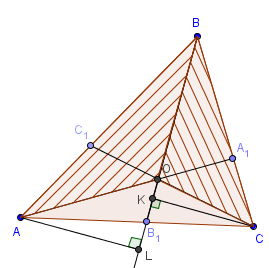
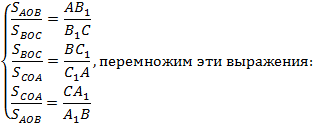
Универсальное условие, «закрывшее» эту проблему, нашёл в 1678 г. итальянский инженер Джованни Чева. Можно сказать, что эта теорема служит фундаментом всей геометрии треугольника.

**Теорема (Чевы).**

Пусть на сторонах *AB, BC* и *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *C*1,*A*1и *B*1*.*Прямые  *AA*1,*BB*1,*CC*1пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда



Доказательство. Пусть O – точка пересечения AA1, BB1 и CC1. Опустим из вершин A и C перпендикуляры на прямую BB1. L и K – основания перпендикуляров.

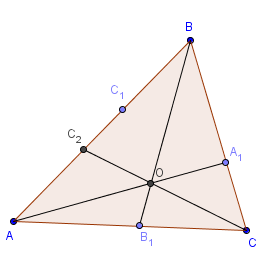
 http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image189.pnghttp://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image190.png   
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image191.png   


http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image193.png

Теорема доказана.

Обратная теорема Чевы. Пусть дан треугольник ABC и точки A, B, C лежат соответственно на сторонах BC, CA, AB. Пусть выполняется соотношение:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image156.png

Тогда отрезки AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения AA1 и BB1 и прямая CO пересекает сторону AB в точке C2. Теперь достаточно доказать, что C1 совпадает с C2.

http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image195.png http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image196.png

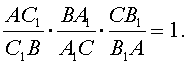
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image197.png   
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image198.png   
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image199.png   
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image200.png   
http://ok-t.ru/studopediaru/baza7/3626797033402.files/image171.png

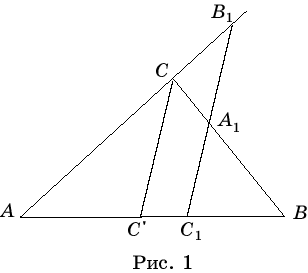
Из аксиомы об откладывании отрезка следует, что C1 совпадает с C2.

Теорема доказана.

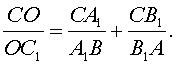
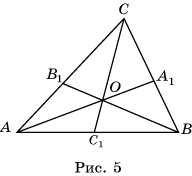
Теперь рассмотрим ещё три теоремы, связанные с замечательными точками.

**Теорема (Менелая).** Пусть на сторонах *AB, BC* и продолжении стороны *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *C*1,*A*1и *B*1. Точки *A*1,*B*1*, C*1лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство





**Теорема Ван-Обеля.** Пусть на сторонах *AB, BC* и *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *C*1,*A*1и *B*1 . Если отрезки *AA*1, *BB*1, *CC*1пересекаются в одной точке *O*, то



**Теорема Карно.** Пусть точки *A*1, *B*1, *C*1 лежат на прямых *BC*, *CA*, *AB* соответственно. Перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника, восставленные в точках *A*1, *B*1, *C*1, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие ВА12 +СВ12+АС12=СА12+АВ12+ВС12.

**Глава III**

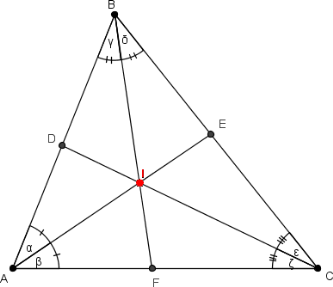
**Определения и свойства замечательных точек**

***Некоторые следствия из теоремы Чевы***.

Замечательных точек треугольника существует множество. Однако как сравнивать степень их «замечательности» между собой? Очевидно, точка тем более замечательна, чем с более естественными и содержательными конфигурациями треугольника она взаимодействует. Поэтому в первый ряд следует поставить, конечно, таких заслуженных ветеранов, как *M*—точку пересечения медиан (центр тяжести, **Центроид**), *O* — центр описанной окружности, *I* — центр вписанной окружности, *H*—точку пересечения высот (ортоцентр). Не испортит общей картины и молодёжь: точка *G* Жергонна, точка *T* Ферма-Торричелли и точка *N* Нагеля.

Следствие 1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке,* *которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.*

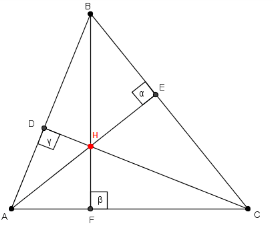
|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\User\Desktop\рис теор\image219.png | Центроид — центр масс фигуры.  В треугольнике центроид — точка пересечения медиан. |



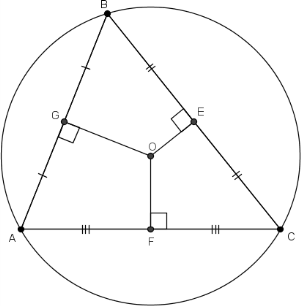
Следствие 2. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Инцентр — точка пересечения биссектрис треугольника. Также инцентр является центром вписанной в треугольник окружности (откуда и название). Традиционно обозначается латинской буквой I.

****Следствие 3. *Высоты треугольника (или их продолжения)* *пересекаются в одной точке (ортоцентре треугольника).*

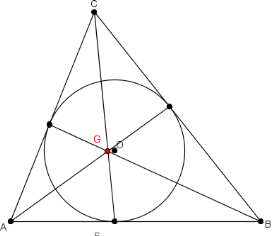
|  |
| --- |
|  |
|  |



Следствие 4. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | * Она равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной окружности. * Окружности, описанные около треугольников, вершинами которых являются середины сторон треугольника и вершины треугольника пересекаются в одной точке, которая совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров*.* |

Следствие 5. *Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке*

Точка Жергона — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания, вписанной окружностью противоположных сторон. Традиционно обозначается G или K.

6.Точка Нагеля

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\User\Desktop\рис теор\image209.png | Точка Нагеля – точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями. Обычно обозначается N.  Точка Нагеля лежит на одной прямой с инцентром и центроидом, при этом центроид делит отрезок между точкой Нагеля и инцентром в отношении 2 : 1 |

7.Точка Ферма-Торричелли

Путь дан треугольник ABC. Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка O, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°, т.е. углы AOB, AOC и BOC равны 120°.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Точка Ферма-Торричелли – точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. |

**Заключение**

Всем ученикам 11а и 11б класса я задала 4 вопроса:

1) Знаете ли вы теоремы Чевы и Менелая?

2) Применяли ли выданные теоремы при решении задач?

3) Как вы считаете, можно ли облегчить решение задач, используя эти теоремы?

4) Хотели бы вы научиться решать задачи на применение данных теорем? Подсчитав ответы «да», получила следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Класс | Количество детей на момент опроса | 1 вопрос | 2 вопрос | 3 вопрос | 4 вопрос |
| 11а | 17 | 5 | 1 | 4 | 15 |
| 11б | 20 | 6 | 3 | 5 | 17 |

В ходе своего исследования мне удалось не только решить задачи с помощью теорем Чевы и Менелая, но и показать рациональность их применения. Считаю, что эта работа актуальна для выпускников старших классов общеобразовательных школ, так как результаты, полученные мною, будут полезны для старшеклассников в привитии им умений и навыков поиска нестандартных способов и методов решения математических задач, в том числе при решении задач № 16 №14 на ЕГЭ.

Гипотезы, выдвинутые в процессе работы, были частично подтверждены, поставленные задачи выполнены, и цель работы достигнута.

В заключение хочется сказать, что в этой исследовательской работе я попыталась рассмотреть как можно больше замечательных точек треугольника, их свойств, используя знания, полученные ранее. Но всё, что мы рассмотрели – лишь вершина айсберга в необъятном океане геометрии треугольника, ведь она поистине неисчерпаема.

Геометрия треугольника, наравне с другими разделами элементарной математики, дает возможность почувствовать красоту математики вообще и может стать для кого-то началом пути в «большую науку».

**Список литературы**

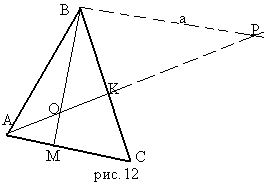
* + 1. Аксёнова М. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика/ В. Володин. – М.: Аванта+, 2004.
    2. Атанасян Л.С. Геометрия, 10–11: Учебник для общеобразовательных учреждений/ В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 1996.
    3. Е. Куланин, А. Мякишев. О некоторых кониках, связанных с треугольником. — М.: МЦНМО, 2007.
    4. Е. Куланин, С. Федин. Геометрия треугольника в задачах. — М.: «Либроком», 2009.
    5. Мадер В.В. Полифония доказательств. – М.: Мнемозина, 2009.
    6. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть I. – M.: МЦНМО, 2001.

Размещено на Allbest.ru

**Приложение**

**1. Применение теорем Чевы и Менелая для решения планиметрических задач.**

**Задача 1.** ВABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что AM: MC= 2:3, BK: KC= 4:3. В каком отношении AK делит отрезок BM?

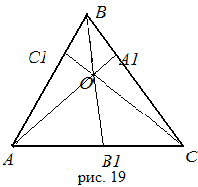
 **Решение:**

Рассмотрим MBC; прямую AK назовем секущей, так как она пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника MBC; AMC,OBM, KBC; A,O,K лежат на AK ( на одной прямой). По теореме Менелая , , =.

Ответ: **=**.

Следует отметить, что теорема Менелая проста для применения, но здесь важно увидеть нужную конфигурацию - треугольник и секущую, причем такие, что два отношения в равенстве Менелая будут известны, тогда можно будет найти третье.

**Задача** **2.** На сторонах треугольника ABC взяты соответственно точки C, A,B,так,

что AC: СB= 2:1, BA:AC=1:3, BB CCAA=O.

Найти CB : BA.

**Решение:**

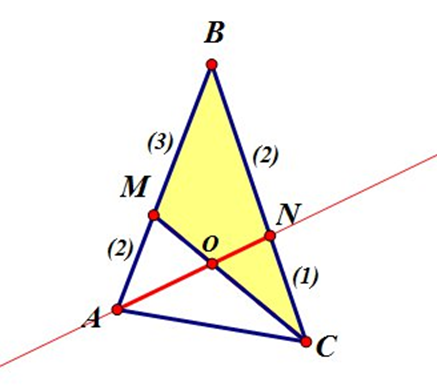
Так как отрезки BB, CC, AA пересекаются в одной точке O, то по теореме Чевы *..=1; =1; =*

Ответ: 3:2

**Задача №3**. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что AM:MB=2:3, BN:NC=2:1. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение CO:OM.

Решение

Применим теорему Менелая к нашей задаче. Рассмотрим треугольник MBC  и прямую AN:



Запишем теорему Менелая для этого треугольника:

{{BN}/{NC}}*{{CO}/{OM}}*{{MA}/{AB}}=1

{2/{1}}*{{CO}/{OM}}*{{2}/5}=1

{{CO}/{OM}}={5/4}=1,25

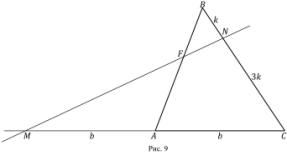
**Ответ: 1,25**

**Задача 4.** В на стороне взята точка так, что . На продолжении стороны за точку взята точка так, что *.* Прямая пересекает сторону в точке *.* Найтиотношение .

Дано: , , , – луч, , , .

Найти отношение .

Решение.

****

Пусть , тогда по условию (): ; пусть , тогда по условию (): .

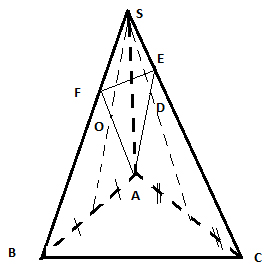
Прямая пересекает две стороны (, ) и продолжение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

Ответ: .

**2. Применение теорем Менелая и Чевы в решении стереометрических задач.**

**Задача1.** Плоскость проходит через вершину *A* основания треугольной пирамиды *SABC* , делит пополам медиану *SK* треугольника *SAB* , а медиану *SL* треугольника *SAC* пересекает в такой точке *D* , для которой *SD:DL =* 1*:*2. В каком отношении делит эта плоскость объём пирамиды?



1. Дано

SABC – треугольная пирамида

BK=KA

AL=LC

SO=OK

---------------------------------------





Решение

Применим теорему Менелая к SBK.

Применим теорему Менелая к SLC.

По формуле отношения объёмов треугольных пирамид имеем:



Пусть VSFAE = V1

VSABC=V1+SAFECB=V1+V2

 15V1=V1+V2

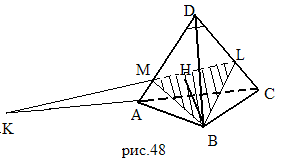
Ответ: 

**Задача 2.** На продолжении ребра АС правильной треугольной пирамиды ABCD с вершиной D взята точка K так, что КА:КС=3:4, а на ребре DC взята точка L так, что DL:LC=2:1. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки B, L и К?

Дано:DABC – правильная пирамида, , , , , BLK –

плоскость,  - объем верхней части пирамиды,  - объем нижней части пирамиды.

Найти: .

Решение:

1) Построим сечение пирамиды DABC плоскостью BLK.

соединяем, соединяем,

, соединяем, MLB - искомое сечение (рис.48).

2) Найдем , где - объем всей пирамиды.

Пусть *BH* – высота пирамиды *DABC,* проведеннаяиз вершины *В*, но она – высота и *BMDL.*

; *V*=, *V*=;

;

,  - ?

3) Из ADC: , , , .

По теореме Менелая , .

, , .

(или: во всем объеме пирамиды 33 части, в верхней – 16, значит, 33-16=17 – частей

составляет . Тогда ) Ответ: .